SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2001-2002

Sergio Polidoro

CONTROESEMPIO AL DECADIMENTO ESPONENZIALE PER SISTEMI CON MEMORIA

26 marzo 2002

Tecnoprint - Bologna 2003

Sunto Viene studiato il comportamento per tempi lunghi della soluzione u di un problema di valori iniziali-al contorno per un'equazione integro-differenziale alle derivate parziali del tipo seguente

$$u_{tt}(x,t) = G_0\Delta u(x,t) + \int_0^t G'(t-s)\Delta u(x,s)ds - au_t(x,t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n, a, G_0$ sono coefficienti reali costanti tali che $a \geq 0$, $G_0 > 0$ e G' è una funzione sommabile non-negativa. Equazioni di questo tipo intervengono in viscoelasticità lineare e nella teoria della diffusione del calore con memoria. Sono note in letteratura condizioni generali sufficienti per l'esistenza, l'unicità, il decadimento a zero della soluzione per t tendente a $+\infty$ ed in particolare per il suo decadimento di tipo esponenziale.

Dimostriamo che la soluzione u non può avere decadimento di tipo esponenziale se il nucleo G' non ha decadimento di tipo esponenziale, indipendentemente dalla scelta della costante a che figura nel termine dissipativo au_t. Forniamo inoltre un analogo risultato relativo al decadimento polinomiale.

Abstract We study the asymptotic behavior of the solution u to a Cauchy-Dirichlet problem related to an integro-partial differential equation of the following type

$$u_{tt}(x,t) = G_0\Delta u(x,t) + \int_0^t G'(t-s)\Delta u(x,s)ds - au_t(x,t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

where Ω is an open subset of $\mathbb{R}^n, a, G_0$ are real constant coefficients such that $a \geq 0$, $G_0 > 0$ and G' is a non-negative integrable function. This kind of equation arises in linear viscoelasticity and in the theory of the heat diffusion with memory. Some general sufficient conditions are available for the existence, the uniqueness, the decay of the solution as t goes to $+\infty$ and, more specifically, for its exponential decay.

We prove that the solution u cannot exponentially decay unless the kernel G' does exponentially decay. This fact is independent on the choice of the constant a which occur in the dissipative term au_t. We also give an analogous result concerning the polynomial decay.

1 Introduzione

In questo seminario presenterò un risultato ottenuto in un recente lavoro in collaborazione con Mauro Fabrizio [6], sul comportamento per tempi lunghi della soluzione u del seguente problema di valori iniziali-al contorno

$$\begin{cases} u_{tt} = G_0\Delta u + G' * \Delta u - au_t & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad u_t(\cdot,0) = u_1 & \text{in } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1.1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera sufficientemente regolare, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, Δ indica l'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^n$ e "$*$" è la convoluzione rispetto alla variabile t:

$$G' * \Delta u(x,t) \equiv \int_0^t G'(t-s)\Delta u(x,s)ds.$$

Nel seguito supporremo che

i) G_0, a sono costanti reali, $G_0 > 0, a \geq 0$,

ii) $G' \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+), G' \leq 0$,

iii) $G_\infty \equiv G_0 + \int_0^\infty G'(t)dt > 0$.

Questo tipo di problema interviene in viscoelasticità lineare e le ipotesi sopra elencate assicurano che, nel caso in cui $G' \not\equiv 0$, il sistema gode della proprietà di "memoria evanescente" e che il problema (1.1) ammette un'unica soluzione.

Nel caso $G' \equiv 0$ l'andamento asintotico della soluzione dipende dal coefficiente a: quando $a = 0$ l'energia della soluzione u è costante, quindi non c' è decadimento della soluzione; d'altra parte, per $a > 0$, l'energia della soluzione u decade con un andamento del tipo e^{-at}.

Nel caso $G' \not\equiv 0$ ed $a = 0$, il problema (1.1) è stato posto in alcuni classici lavori di Volterra e di Graffi, quindi è stato sistematicamente studiato da vari autori (si veda il libro di Fabrizio e Morro [5] pr un'ampia bibliografia sull'argomento). Tra i risultati noti in letteratura, riguardo esistenza, unicità e stabilità della soluzione, ricordo i lavori di Dafermos [2] e di Fabrizio e Lazzari [4], dove si mostra che il decadimento asisntotico del nucleo G' è una condizione sufficiente per il decadimento esponenziale della soluzione u. Noi abbiamo voluto mostrare che il decadimento esponenziale di G' è anche una condizione necessaria per il decadimento esponenziale di u e siamo riusciti a provare un risultato più forte: il decadimento esponenziale di G' è necessario anche quando la costante a che figura nel problema (1.1) è positiva.

La nostra tecnica si applica anche al problema seguente, che ha origine nella teoria della conduzione del calore con memoria:

$$\begin{cases} u_t = K_0\Delta u + K' * \Delta u - au & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1.2}$$

sotto le ipotesi

i') K_0, a sono coefficienti costanti non-negativi,

ii') $K' \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+), K' \geq 0$.

Come il problema (1.1), anche il problema (1.2) è stato studiato da vari autori (si veda ad esempio il lavoro di Giorgi e Gentili [3] e la relativa bibliografia). Abbiamo mostrato che il decadimento esponenziale di K' è condizione necessaria anche per il decadimento della soluzione u del problema (1.2).

Abbiamo successivamente esteso i risultati sopra indicati al problema del decadimento polinomiale delle soluzioni. Il problema è stato studiato da vari autori, tra cui ricordo Muñoz Rivera, Cabanillas Lapa [8] e da Muñoz Rivera, Barbosa Sobrinho [9]; i risultati principali dei lavori indicati consistono in alcune stime asintotiche dell'energia della soluzione, che risulta maggiorata da una opportuna funzione del tipo $(1+t)^{1+1/q}$, per t che tende all' infinito. Abbiamo inoltre considerato problemi analoghi a quelli sopra descritti, ma con dato al bordo con memoria.

Concludo questa introduzione con un commento sul risultato. I termini au_t e $G' * \Delta u$ che compaiono in (1.1) sono entrambi dissipativi. Nonostante ciò il secondo termine, anzichè contribuire ad aumentare la velocità di decadimento causata dal primo, arriva a nasconderne gli effetti. Questo risultato non è completamente inatteso: sono infatti noti risultati in tal senso per equazioni integro-differenziali in una variabile (relativi cioé ad un'equazione differenziale ordinaria, si veda Murakami [7] per il decadimento esponenziale, Appleby and Reynods [1] per quello polinomiale).

Possiamo anche osservare che il problema (1.2) corrispondente a $K' \not\equiv 0$ ha caratteristiche diverse rispetto al caso $K' \equiv 0$. Consideriamo infatti il problema relativo a $K' \equiv 0$: è facile vedere che la funzione $v(x,t) = e^{at}u(x,t)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} v_t = K_0\Delta v & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ v(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

quindi evidentemente u decade exponenzialmente. Quando invece $K' \not\equiv 0$, lo stesso cambiamento di funzione porta a

$$\begin{cases} v_t = K_0\Delta v + M' * \Delta v & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v(\cdot,0) = u_0 & \text{in } \Omega \\ v(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

dove il nucleo $M(t) = e^{at}K'(t)$ non soddisfa ncessariamente la condizione *(ii')*.

2 Un primo controesempio

In questo paragrafo troveremo un controesempio al decadimento esponenziale della soluzione di un sistema con memoria. Diremo che una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ decade esponenzialemente se esiste una costante positiva α tale che

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}|f(t)|dt < \infty.$$

A fine di considerare la situazione più semplice, studieremo dapprima il problema (1.2) in una sola dimensione spaziale e con un dato iniziale particolare:

$$\begin{cases} u_t = K_0 u_{xx} + K' * u_{xx} - au & \text{in }]0,\pi[\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \sin(x) & \text{per } x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{2.1}$$

sotto le ipotesi *(i')* ed *(ii')*. Notiamo innanzitutto che la soluzione del precedente problema deve essere una funzione della forma $u(x,t) = \sin(x)f(t)$, dove f è l'unica soluzione classica di

$$f'(t) = -K_0 f - K' * f(t) - af(t), \quad f(0) = 1, \tag{2.2}$$

è quindi ragionevole dichiarare che la soluzione u decade esponenzialmente se e solo se f decade esponenzialmente. Il primo risultato è contenuto nella seguente

Proposizione 2.1 *Sia u una soluzione del problema (2.1), e supponiamo verificatele ipotesi (i'), (ii'). Se u decade esponenzialmente, allora anche K' decade esponenzialmente.*

Al fine di dimostrare la Proposizione 2.1, consideriamo la trsformata di Laplace della funzione f, che verrà indicata con la notazione

$$\widehat{f}(z) \doteq \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt.$$

La prova si basa sul seguente risultato:

Lemma 2.2 *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un intorno dello zero e sia $g : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$ è una funzione non-negativa e tale che $\widehat{G}(z) = g(z)$ per ogni $z \in U \cap \{\Re e\ z \geq 0\}$, Allora G decade esponenzialmente.*

DIMOSTRAZIONE Osserviamo innanzitutto che, essendo $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$, entrambe le funzioni $\widehat{G}$ e g sono olomorfe nel dominio $\{\Re e\ z > 0\}$ e che

$$g^{(k)}(x) = \widehat{G}^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-xt} G(t)dt$$

per ogni numero reale positivo $x \in U$ e per ogni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Poiché G è non-negativa, possiamo considerare il limite per x che tende a zero nella precedente identità e trovare

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k \int_0^\infty t^k G(t)dt.$$

Utilizzando il fatto che g è olomorfa in U deduciamo che esite un r positivo tale che

$$g(-r) = \sum_{k=0}^\infty \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(-r)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{r^k}{k!} \int_0^\infty t^k G(t)dt = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{r^k t^k}{k!} G(t)dt = \int_0^\infty e^{rt} G(t)dt,$$

di conseguenza G decade esponenzialmente. □

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.1 Avendo supposto che u decada esponenzialmente, esiste un α positivo tale che

$$\int_0^\infty e^{\alpha t} |f(t)| dt < \infty,$$

quindi la trasformata di Laplace di f risulta definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\Re e\ z > -\alpha$. A causa dell'ipotesi *(ii')* la trasformata di Laplace di K' è definita in $\{\Re e\ z \geq 0\}$ e

$$\widehat{f}(z)\left(K_0 + \widehat{K'}(z) + z + a\right) = 1,$$

per ogni $z \in \{\Re e\ z \geq 0\}$. Notiamo che, per la precedente identità, $\widehat{f}(0) \neq 0$, quindi $\widehat{f}(z) \neq 0$ per ogni z in un opportuno intorno U di 0. Pertanto

$$\widehat{K'}(z) = \frac{1}{\widehat{f}(z)} - (K_0 + z + a),$$

per ogni $z \in U$ tale che $\Re e\ z \geq 0$. Il risultato segue allora dal Lemma 2.2. □

3 Risultato generale

In questo paragrafo enunceremo con precisione i risultati relativi alle soluzioni deboli dei problemi (1.1) e (1.2).

Diremo che una funzione $u \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ è soluzione debole di (1.1) se $u(\cdot, 0) = u_0$ quasi ovunque in Ω e

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} u_t\phi_t dxdt + \int_\Omega u_1\phi(\cdot,0)dx = \\ \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} (G_0\langle\nabla u, \nabla\phi\rangle + \langle G' * \nabla u, \nabla\phi\rangle + au_t\phi)\, dxdt\end{aligned} \tag{3.1}$$

per ogni $\phi \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$. In (3.1) ∇ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indicano il gradiente de il prodotto interno di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che una funzione $u \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ decade esponenzialmente se esiste una costante positiva α tale che

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} e^{2\alpha t} \left(u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dxdt < \infty.$$

Il nostro primo risultato è contenuto nel seguente

Teorema 3.1 *Consideriamo il problema (1.1), sotto le ipotesi (i), (ii), (iii) e sia u una soluzione non banale. Se G' non decade esponenzialmente, allora neanche u decade esponenzialmente.*

Rigurdo al problema (1.2), diremo che $u \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ è soluzione se

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} u\phi_t dxdt + \int_\Omega u_0\phi(\cdot,0)dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} (K_0\langle\nabla u, \nabla\phi\rangle + \langle K' * \nabla u, \nabla\phi\rangle + au\phi)\, dxdt \tag{3.2}$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty[)$ e che decadwe esponenzialmente se esiste un α positivo tale che

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} e^{2\alpha t}|\nabla u(x,t)|^2 dxdt < \infty.$$

Il nostro risultato riguardo al problema (1.2) è il seguente.

Teorema 3.2 *Sia u una soluzione non banale del problema (1.2), sotto le ipotesi (i'), (ii'). Se K' non decade esponenzialmente, allora neanche u decade esponenzialmente.*

Nel seguito darò una prova riassunta del Teorema 3.1, la prova del Teorema 3.2 è analoga e non verrà riportata.

PROVA DEL TEOREMA 3.1 Supponiamo per assurdo che la soluzione u del problema (1.1) decada esponenzialmente. Esiste allora una costante α tale che

$$\int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} e^{2\alpha t} \left(u_t(x,t)^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right) dxdt < \infty. \tag{3.3}$$

Di conseguenza la trasformata di Laplace di u

$$\widehat{u}(x,z) = \int_0^\infty e^{-zt} u(x,t)dt,$$

è definita per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $\Re e\ z > -\alpha$. Inoltre, la stessa affermazione vale per le derivate $\partial_{x_j} u(x,t)$, con $j = 1, ..., n$. Notiamo anche che la trasformata di Laplace di G' è definita per ogni $z \in \{\Re e\ z \geq 0\}$ e che la funzione $\widehat{u}(\cdot, z)$, è una soluzione debole di $\big(G_0 + \widehat{G'}(z)\big)\Delta\widehat{u}(\cdot, z) = (z^2 + az)\widehat{u}(\cdot, z) - u_1 - (a+z)u_0$ in Ω, $u(\cdot, z) = 0$, in $\partial\Omega$, nel senso che $\widehat{u}(\cdot, z) \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}\big(G_0 + \widehat{G'}(z)\big) \int_\Omega \langle \nabla\widehat{u}(x,z), \nabla\psi(x)\rangle dx + (z^2 + az) \int_\Omega \widehat{u}(x,z)\psi(x)dx = \\ \int_\Omega \big(u_1(x) + (a+z)u_0(x)\big)\psi(x)dx,\end{aligned} \tag{3.4}$$

per ogni $\psi \in H_0^1(\Omega)$. A questo punto dobbiamo considerare due casi.

Supponiamo che $u_1 + au_0 \not\equiv 0$ (qui e nel seguito, intenderemo che $u_1(x) + au_0(x) \neq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$). L'identità (3.4) considerata in $z = 0$ diventa

$$\big(G_0 + \widehat{G'}(0)\big) \int_\Omega \langle \nabla\widehat{u}(x,0), \nabla\psi(x)\rangle dx = \int_\Omega \big(u_1(x) + au_0(x)\big)\psi(x)dx, \tag{3.5}$$

quindi $\nabla\widehat{u}(\cdot, 0) \not\equiv 0$ e, di conseguenza, la funzione

$$g(z) = \int_\Omega \langle \nabla\widehat{u}(x,z), \nabla\widehat{u}(x,0)\rangle dx$$

è diversa da zero ed olomorfa in un opportuno intorno U di 0. Quindi, usando $\widehat{u}(\cdot, 0)$ come funzione test in (3.4), troviamo

$$\widehat{G'}(z) = \frac{\int_\Omega \big(u_1(x) + (a+z)u_0(x) - (z^2 + az)\widehat{u}(x,z)\big)\widehat{u}(x,0)dx}{\int_\Omega \langle \nabla\widehat{u}(x,z), \nabla\widehat{u}(x,0)\rangle dx} - G_0,$$

per ogni $z \in U$ tale che $\Re e\ z \geq 0$. Notiamo poi che il secondo membro della precedente identità è olomorfo in U e questo, grazie al Lemma 2.2, porta a concludere che G' decade esponenzialmente.

Supponiamo ora che $u_1 + au_0 = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$. In questo caso l'identità (3.5) implica $\nabla\widehat{u}(\cdot, 0) \equiv 0$ e, quindi, $\widehat{u}(\cdot, 0) \equiv 0$.

Poiché u è una soluzione non banale del problema (1.2), avremo $u_0 \not\equiv 0$, di conseguenza potremo scegliere una funzione test ψ tale che

$$\int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx > 0.$$

Al fine di utilizzare anche in questo caso il Lemma 2.2, calcoliamo la derivata della funzione $z \mapsto \int_\Omega \langle \nabla \widehat{u}(x,z), \nabla \psi(x)\rangle dx$ nel punto $z = 0$: usando il fatto che $\widehat{u}(\cdot, 0) \equiv 0$ otteniamo da (3.4) che

$$\frac{d}{dz}\int_\Omega \langle \nabla \widehat{u}(x,0), \nabla \psi(x)\rangle dx = \lim_{z\to 0} \frac{\int_\Omega \langle \nabla \widehat{u}(x,z), \nabla \psi(x)\rangle dx}{z} =$$
$$\lim_{z\to 0} \frac{\int_\Omega \big(u_0(x) - (z+a)\widehat{u}(x,z)\big)\psi(x)dx}{G_0 + \widehat{G'}(z)} = \frac{\int_\Omega u_0(x)\psi(x)dx}{G_\infty}$$

che è positiva, per la nostra scelta di ψ e per l'ipotesi *(iii)*. Questo significa che deve esistere un intorno U di 0 tale che la funzione $z \mapsto \int_\Omega \langle \nabla \widehat{u}(x,z), \nabla \psi(x)\rangle dx$ è olomorfa in U, ha uno zero semplice in $z = 0$ e non si annulla in alcun altro punto di $U\backslash\{0\}$. Essendo $\int_\Omega \big(u_0(x) - (z+a)\widehat{u}(x,z)\big)\psi(x)dx$ olomorfa, possiamo concludere che la funzione

$$h(z) = \frac{z\int_\Omega \big(u_0(x) - (z+a)\widehat{u}(x,z)\big)\psi(x)dx}{\int_\Omega \langle \nabla \widehat{u}(x,z), \nabla \psi(x)\rangle dx} - G_0$$

può essere estesa in maniera olomorfa su U. Come nel caso precedente, possiamo scrivere $\widehat{G'}(z) = h(z)$, per ogni $z \in U$ tale che $\Re e\ z \geq 0$, ed il Lemma 2.2 implica il decadimento esponenziale di G'. Questo conclude la prova del Teorema. □

4 Decadimento polinomiale

In questo paragrafo studieremo il decadimento polinomiale delle soluzioni dei problemi (1.1) e (1.2). Ricordiamo innanzitutto che, nei lavori [8] e [9], gli autori suppongono che il nucleo g appartenga ad $L^{1+1/p}(\mathbb{R})$ e soddisfi la condizione $g'(t) \leq -cg(t)^{1+1/p}$ e dimostrano che l'energia della soluzione decade come la funzione $(1+t)^{1+1/q}$, per un opportuno esponente q. Noi adottiamo la seguente definizione di decadimento polinomiale in senso integrale.

Diciamo che una funzione $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ è di tipo polinomiale se esiste una costante reale q tale che

$$\int_0^\infty (1+t)^q |g(t)| dt < \infty.$$

Nel caso che questa sia un numero reale positivo, chiameremo la seguente costante

$$p_0 = \sup\left\{p \in \mathbb{R} : \int_0^\infty (1+t)^{p-1}|g(t)|dt < \infty\right\}$$

grado di decadimento polinomiale di g. Per giustificare la nostra definizione, osserviamo che il grado di decadimento polinomiale di $g(t) = (1+t)^{-p_0}$ è esattamente p_0.

Sarà anche necessario definire il grado di decadimento polinomiale di una funzione $u \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega))$, rispetto alla variabile t. In questo caso poniamo

$$p_0 = \sup \left\{ p \in \mathbb{R} : \int_{\Omega \times \mathbb{R}^+} (1+t)^{2p-1} |\nabla u(x,t)|^2 dx dt < \infty \right\}$$

e diciamo che p_0 è il grado di decadimento polinomiale di u se p_0 è positivo. La definizione sopra scritta si applica sia alle soluzioni di (1.1), sia a quelle di (1.2). Sempre per giustificare la definizione, osserviamo che $u(x,t) = \psi(x)(1+t)^{-p_0}$, con $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ha grado di decadimento polinomiale p_0.

Teorema 4.1 *Sia u soluzione non banale del problema (1.1), sotto le ipotesi (i), (ii), (iii). Indichiamo con p_0 il grado di decadimento polinomiale di G' e con q_0 il grado di decadimento polinomiale di u. Se $q_0 > 1$ e $u_1 + au_0 \not\equiv 0$, allora $p_0 \geq q_0$.*

Teorema 4.2 *Sia u soluzione non banale del problema (1.2), sotto le ipotesi (i'), (ii'). Indichiamo con p_0 il grado di decadimento polinomiale di K' e con q_0 il grado di decadimento polinomiale di u. Se $q_0 > 1$, allora $p_0 \geq q_0$.*

La prova dei Teoremi 4.1 e 4.2 si basa sui seguenti risultati.

Osservazione 4.3 *Sia $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Se*

$$\int_0^\infty t^k |G(t)| dt < \infty,$$

per un opportuno $k \in \mathbb{N}$, allora $\widehat{G}$ è dotato di derivata k-esima continua in $\{\Re e\, z \geq 0\}$. Quando $G \geq 0$, è vera l'implicazione opposta: se $G \geq 0$ e $\widehat{G}$ è dotato di derivata k-esima continua in $\{\Re e\, z \geq 0\}$, allora

$$\int_0^\infty t^k G(t) dt < \infty.$$

La precedente proprietà è diretta conseguenza del fatto che

$$\widehat{G}^{(k)}(z) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-zt} t^k G(t) dt$$

per ogni $z \in \{\Re e\, z > 0\}$. Nel seguito faremo uso del seguente risultato, che costituisce un raffinamento del precedente.

Lemma 4.4 *Sia $G \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Se*

$$\int_0^\infty t^{k+\alpha}|G(t)|dt < \infty,$$

per opportuni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\alpha \in]0,1[$, allora

$$\frac{\left|\widehat{G}^{(k)}(h) - \widehat{G}^{(k)}(0)\right|}{h^\alpha} < \infty, \qquad \text{per ogni } h > 0.$$

Se $G \geq 0, \widehat{G}$ è dotato di derivata k-esima continua in $\{\Re e\ z \geq 0\}$ e la costante

$$\beta = \sup\left\{\alpha \geq 0 : \frac{|\widehat{G}^{(k)}(h) - \widehat{G}^{(k)}(0)|}{h^\alpha} \text{ è limitata in }]0,1]\right\},$$

è positiva, allora

$$\int_0^\infty t^{k+\alpha}G(t)dt < \infty,$$

per ogni $\alpha \in]0,\beta[$.

In altri termini, il grado di decadimento polinomiale di G può essere caratterizzato come

$$p_0 = 1 + \sup\left\{k+\alpha : \widehat{G} \in C^k(\{\Re e\ z \geq 0\}), \widehat{G}^{(k)} \text{ è } \alpha - \text{Hölderiano in } z = 0\right\}.$$

Osservazione 4.5 *In generale non è vero che, se $G \geq 0$ è tale che $\widehat{G} \in C^k(\{\Re e\ z \geq 0\})$ e $\widehat{G}^{(k)}$ è Hölderiano di esponente α in $z = 0$ allora $\int_0^\infty (1+t)^{k+\alpha}G(t)dt < \infty$.*

Consideriamo, per esempio, la funzione $G(t) = (1+t)^{-(k+\alpha+1)}$ per opportuni $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ed $\alpha \in]0,1[$: evidentemente risulta $\int_0^\infty (1+t)^{k+\alpha}G(t)dt = \infty$, ma d'altra parte

$$\frac{\left|\widehat{G}^{(k)}(h) - \widehat{G}^{(k)}(0)\right|}{h^\alpha} = \int_0^\infty t^k \frac{1-e^{-ht}}{h^\alpha(1+t)^{k+\alpha+1}}dt \leq \int_0^\infty \frac{1-e^{-ht}}{h^\alpha t^{\alpha+1}}dt = \int_0^\infty \frac{1-e^{-s}}{s^{\alpha+1}}ds < \infty,$$

per ogni h positivo.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 4.4 Supponiamo che

$$\int_0^\infty t^{k+\alpha}|G(t)|dt < \infty,$$

per $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\alpha \in]0,1[$ assegnati. Consideriamo la funzione

$$\phi_\alpha(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^\alpha} \quad s > 0$$

ed osserviamo che questa è limitata su $\mathbb{R}^+$. Quindi, scrivendo la derivata $\widehat{G}^{(k)}$ come

$$\widehat{G}^{(k)}(z) = (-1)^k \int_0^\infty e^{-zt} t^k G(t)dt,$$

troviamo facilmente che

$$\frac{\left|\widehat{G}^{(k)}(h) - \widehat{G}^{(k)}(0)\right|}{h^\alpha} \leq \int_0^\infty \phi_\alpha(th) t^{k+\alpha}|G(t)|dt < \infty,$$

per ogni h positivo. Resta così provata la primma affermazione.

Al fine di dimostrare la seconda affermazione supponiamo, per assurdo, che esista $\alpha \in]0,\beta[$ tale che

$$\int_0^\infty t^{k+\alpha} G(t)dt = \infty.$$

Scegliamo un qualunque $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Per definizione di β, esiste una costante C_γ positiva tale che

$$\left|\widehat{G}^{(k)}(h) - \widehat{G}^{(k)}(0)\right| \leq C_\gamma h^\gamma \quad \text{per ogni } h \in]0,1].$$

Definiamo ora la successione (b_j) ponendo

$$b_j = \int_{2^{j-1}}^{2^j} t^{k+\gamma} G(t)dt,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$, indichiamo inoltre

$$\bar{c}_\gamma = \min_{[1,2]} \phi_\gamma = \min_{s\in[1,2]} \frac{1-e^{-s}}{s^\gamma}.$$

Osserivamo che $\bar{c}_\gamma > 0$ e che

$$b_j\bar{c}_\gamma \leq \int_{2^{j-1}}^{2^j} \phi_\gamma(2^{1-j}t)t^{k+\gamma}G(t)dt \leq \int_0^\infty \phi_\gamma(t2^{1-j})t^{k+\gamma}G(t)dt = \frac{\left|\widehat{G}^{(k)}(0) - \widehat{G}^{(k)}(2^{1-j})\right|}{2^{(1-j)\gamma}} \leq C_\gamma,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Quindi la successione (b_j) è limitata.

Consideriamo ora la successione

$$a_j = \int_{2^{j-1}}^{2^j} t^{k+\alpha}G(t)dt :$$

si ha $a_j \leq 2^{(j-1)(\alpha-\gamma)}b_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, quindi $a_j = O(2^{-j(\gamma-\alpha)})$ per $j \to \infty$ e, di conseguenza, $\sum_{j=1}^\infty a_j < \infty$. D'altra parte abbiamo supposto che

$$\sum_{j=1}^\infty a_j = \int_1^\infty t^{k+\alpha}G(t)dt = \infty,$$

e questa contraddizione conlude la prova del Lemma. □

La prova dei Teoremi 4.1 e 4.2 è analoga a quella dei Teoremi 3.1 e 3.2, rispettivamente. Si tratta di utilizzare il Lemma 4.4 invece del Lemma 2.2, per questo motivo non riportiamo i dettagli della dimostrazione.

5 Conclusioni

In questo paragrafo daremo un ultimo risultato rigardo al problema delle onde con memoria sul dato al bordo:

$$\begin{cases} u_{tt} = G_0\Delta u - au_t & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(\cdot,0) = u_0 \quad u_t(\cdot,0) = u_1 & \text{in } \Omega \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = G' * u & \text{in } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{5.1}$$

dove ν indica la normale esterna al bordo di Ω. Il risultato provato per il problema (1.1) si estende al caso sopra indicato; ne riporto l'enunciato, ma non la prova.

Proposizione 5.1 *Consideriamo il problema (5.1), sotto le ipotesi (i), (ii), (iii) e sia u una soluzione non banale. Se G' non decade esponenzialmente, allora neanche u decade esponenzialmente.*

Vorrei concludere questo seminario con un'osservazione riguardo il confronto tra il tipo di risultato che abbiamo trovato la teoria generale dei semigruppi. Tale osservazione che era già stata evidenziata nei lavori [7] e [1] relativi al problema di equazioni differenziali ordinarie con un termine di convoluzione. Richiamo innanzitutto il seguente teorema:

Teorema 5.2 (si veda, ad esempio Pazy [10], Cap. 4) *Sia $T(t)$ un semigruppo di classe C_0. Se esiste $p \in [1, \infty[$ tale che*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p dt < \infty, \qquad \text{per ogni } x \in X,$$

allora esistono due costanti $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tali che $\|T(t)x\| \leq Me^{-\mu t}$.

Ricordo che il teorema appena richiamato è stato utilizzato da Fabrizio e Lazzari in [4] per provare la stabilità asintotica della soluzione di (1.1), sotto opportune condizioni sulla funzione G'. Più precisamente, in [4] viene considerato lo spazio X delle triple (u, u_t, u_d^t), dove $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega), u_t(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ ed u_d^t appartiene ad un opportuno spazio Y correlato alla storia del sistema fino al tempo t. In tale contesto la norma $\| \cdot \|_Y^2$ è collegata all'energia libera e la norma di $T(t)x$ è l'energia totale del sistema

$$\|T(t)x\|^2 = E(t)^2 = \|u(\cdot, t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_d^t(\cdot, t)\|^2_Y$$

ed è sommabile su $\mathbb{R}^+$.

Nel nostro caso il Teorema 5.2 ed il nostro Teorema 3.1 dicono che non è possibile trovare uno spazio Y che contenga la storia del sistema relativo al problema (1.1) tale che

$$\int_0^\infty E(t)^p dt < \infty,$$

per un opportuno $p \in [1, \infty[$ e per ogni dato iniziale.

Riferimenti bibliografici

[1] J. A. D. Appleby, D. W. Reynolds, *On the non-exponential convergence of asymptotically stable solutions of linear scalar Volterra integro-differential equations*, preprint.

[2] C. M. Dafermos, *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics*, Proc. IUTAM/I.M.U. Conference of Applications of Functional Analysis to Mechanics 1975. Lecture Notes in Mathematics, 503, Springer-Verlag.

[3] C. GIORGI, G. GENTILI, *Thermodynamic properties and stability for the heat flux equation with linear memory*, Quart. Appl. Math. **51,2** (1993) 343–362.

[4] M. FABRIZIO, B. LAZZARI, *On the existence and the asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991) 139–152.

[5] M. FABRIZIO, A. MORRO, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[6] M. FABRIZIO, S. POLIDORO, *Asymptotic decay for some differential systems with memory*, in corso di stampa su Applicable Analysis.

[7] S. MURAKAMI, *Exponential asymptotic stability of scalar linear Volterra equations*, Differential Integral Equations. **4, 3** (1991) 519–525.

[8] J. E. MUÑOZ RIVERA, E. CABANILLAS LAPA, *Decay rates of solutions of an anisotropic inhomogeneous n-dimensional viscoelastic equation with polynomial decaying kernels*, Commun. Math. Phys. **177** (1996) 583–682.

[9] J. E. MUÑOZ RIVERA, J. BARBOSA SOBRINHO, *Existence and uniform rates of decay for contact problems in viscoelasticity*, Appl. Anal. **67,3-4** (1997) 175–199.

[10] A. PAZY, *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer, New York, 1983.